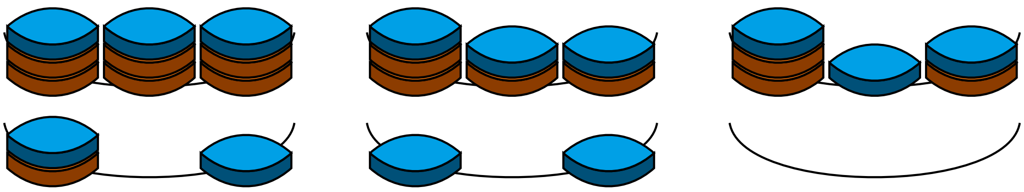
TFJM 2026

I) Guerre à l'apéro

Une assiette contient n piles de n chips. Alice et Bob vont à tour de rôle manger des chips sur le tas de la manière suivante : chacun peut prendre autant de chips qu'il veut parmi celles qui sont découvertes, c'est-à-dire sur le dessus d'une pile. Ils doivent à chaque fois prendre au moins une chips. Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chips sur la table. Alice commence.

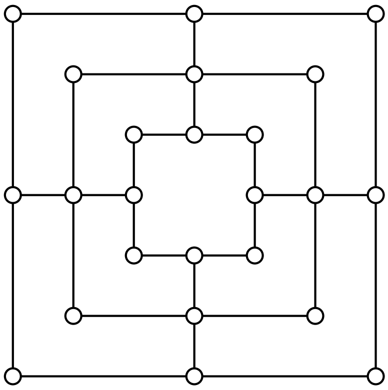
Exemple Ci-dessous une partie en cinq étapes, les chips étant représentées par des jetons, et les jetons bleus étant ceux pouvant être choisis. Alice a finalement mangé 7 chips et Bob 2.



1. Combien y a-t-il d'états possibles du tas de chips ?
2. Alice et Bob sont gourmands et cherchent donc à manger le plus de chips possible au cours de la partie.
   a) Dans cette question, Bob joue de manière gloutonne : à son tour, il prend toutes les chips qu'il peut. Combien de chips au maximum Alice peut-elle s'assurer d'avoir, en fonction de n ?
   b) Maintenant Bob réfléchit avant de jouer. Combien de chips au maximum Alice peut-elle s'assurer de manger en fonction de n, quelle que soit la façon dont joue Bob ?
3. Dans cette question, la chips en bas à gauche est une délicieuse chips goût barbecue que Alice et Bob veulent absolument manger. En fonction de n, Alice peut-elle s'assurer de la manger ?

II) Jeu du moulin

Alice et Bob sont intrigués par le plateau du Jeu du Moulin ci-contre.



Ils remarquent que c'est une figure géométrique constituée de points et de bâtons droits, vérifiant les trois conditions suivantes :

- Chaque bâton comporte exactement 3 points.
- Chaque point appartient à exactement 2 bâtons.
- Si deux bâtons s'intersectent, alors ils ne sont pas colinéaires.

Ils se demandent s'il y a d'autres figures avec ces propriétés, qu'ils appellent figure du moulin. Pour une figure du moulin donnée, on note p le nombre total de ses points.

1. Quel est le p minimal tel qu'il existe une figure du moulin avec p points ?

On dit qu'une figure de moulin est connexe si on peut aller de n'importe quel point vers n'importe quel autre en suivant les bâtons.

2. Déterminer tous les $p \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe une figure du moulin connexe avec p points.

III) Poison dans les boissons

Lors d'un transport de marchandises, certains tonneaux de jus de raisin ont été contaminés par un poison incolore et inodore. On cherche un moyen de trouver quels sont les tonneaux empoisonnés.

Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On suppose qu'il y a N tonneaux numérotés dans $[\![1, N]\!]$. On suppose aussi qu'on sait qu'exactement $k \leq N$ tonneaux ont été contaminés.

Une stratégie de détection S est le choix d'un ou plusieurs tonneaux à tester qu'on verse (en les mélangeant ou non) dans des verres de volume unité, puis qu'on teste à l'aide de détecteurs.

La stratégie est un succès si, partant de n'importe quelle configuration initiale de k tonneaux empoisonnés, elle permet d'identifier les tonneaux empoisonnés et uniquement ceux-là. Sinon, la stratégie est un échec.

Étant donnée une stratégie S, on note $D_{N,k}(S)$ le nombre de détecteurs qui ont été utilisés dans cette stratégie. Une stratégie S est optimale si $D_{N,k}(S)$ est le plus petit possible. Dans toutes les questions du problème, on pourra commencer par le cas $k = 1$.

1. Dans cette question, on suppose que les détecteurs sont parfaits, c'est-à-dire qu'ils détectent la présence du poison dans n'importe quel mélange. Déterminer une stratégie optimale de détection S et déterminer $D_{N,k}(S)$.
2. On fixe $s \in]0, 1[$. Dans cette question, on suppose que les détecteurs sont sensibles, c'est-à-dire qu'ils détectent la présence de poison si, et seulement si, sa concentration dans l'échantillon testé est supérieure ou égale à s. Déterminer une stratégie optimale de détection S et déterminer $D_{N,k}(S)$.

3. Dans cette question, on suppose que les détecteurs ne sont plus déterministes. On fixe $p \in]0,1[$ et $q \in [0,1]$ et on suppose que la probabilité que le détecteur détecte la présence de poison est p et que la probabilité de faux-positif est q, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}_{\text{présence de poison}}(\text{détection positive}) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{\text{absence de poison}}(\text{détection positive}) = q.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. On dit qu'une stratégie S est ε-optimale si $D_{N,k}(S)$ est le plus petit possible parmi toutes les stratégies pour lesquelles la probabilité d'échec est inférieure à ε.

   a) Dans cette question et la suivante, on suppose que $q = 0$. Établir une stratégie de détection pour laquelle la probabilité d'échec est inférieure à ε.

   b) Déterminer une stratégie ε-optimale S et déterminer $D_{N,k}(S)$.

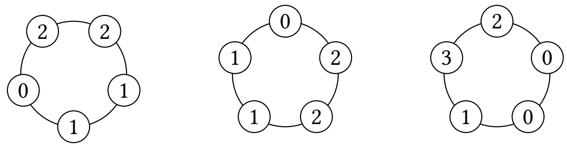
   c) Mêmes questions avec $q \neq 0$.

IV) Colliers de perles

À la cour, un joaillier est spécialiste de fabrication de collier de perles pour les nobles gens. Pour faire ses colliers, le joaillier dispose de différents types de perles, un type pour chaque entier positif, appelée sa valeur (en pièces d'or).

Un collier se caractérise par la succession des valeurs des perles qui le composent, formant un cercle. On définit la longueur ℓ d'un collier comme étant son nombre de perles et son prix p comme la somme des valeurs de ses perles. On considère deux colliers comme étant les mêmes si on peut obtenir l'un à partir de l'autre via une rotation.

Exemple Ci-contre, trois colliers de longueur $\ell = 5$, de prix $p = 6$. Les colliers A et B sont les mêmes.



A B C

Un jour un client lui commande un collier avec 7 perles, au prix de 5 pièces d'or, qui ne contient jamais 2 perles de valeur 0 à la suite.

1. Combien de colliers le joaillier peut-il lui proposer ?

Le joaillier souhaite anticiper les caprices du client. On note $C(\ell, p, m)$ l'ensemble des colliers de longueur ℓ, de prix p et qui ne contiennent pas m perles de valeur zéro à la suite.

2. À quelles conditions sur (ℓ, p, m) le joaillier peut-il proposer au moins un collier au client ?

Le joaillier rencontre un problème de livraison : seules les perles d'une valeur appartenant à un certain sous-ensemble $D \subset \mathbb{N}$ sont disponibles. On note $C_D(\ell, p, m)$, l'ensemble des colliers de $C(\ell, p, m)$ constitués uniquement de perles de valeur dans D.

3. Si D est l'ensemble des nombres pairs, à quelle(s) conditions(s) sur (ℓ, pm) l'ensemble $C_D(\ell, p, m)$ est-il non vide ?
4. Pour D fixé, à quelle(s) condition(s) sur (ℓ, p, m) a-t-on l'égalité $C(\ell, p, m) = C_D(\ell, p, m)$?
5. Si $D = \{0, 1\}$, Combien de colliers sont dans $C_D(\ell, p, m)$? On pourra distinguer les cas suivants

   a) $\operatorname{pgcd}(\ell, p) = 1$ **b)** $\operatorname{pgcd}(\ell, p)$ est un nombre premier **c)** $\operatorname{pgcd}(\ell, p)$ est quelconque.

V) Malaise dans la salle d'attente

Dans un grand hôpital d'une contrée lointaine, la salle d'attente est composée de tabourets qui forment une grille $m \times n$. L'hôpital cherche à maximiser la capacité de cette salle d'attente. Le problème est que les habitants de cette contrée sont très timides : ils se sentent mal à l'aise s'il y a quelqu'un assis sur l'un des quatre tabourets adjacents.

On dit que la salle est **quasi-complète** si personne n'est mal à l'aise, et plus personne ne peut s'asseoir sans être mal à l'aise ou rendre quelqu'un d'autre mal à l'aise.

1. Dans cette question, le personnel de l'hôpital place les gens comme il le souhaite pour placer un maximum de personnes sans que personne ne mal à l'aise. Combien de personnes peut-il placer en fonction de m et n ?

Pour les questions suivantes, chaque siège a une orientation fixée (Nord, Sud, Est ou Ouest), et chaque personne assise sur un siège regarde dans la direction associée, à une distance égale à 1 (elle ne voit que l'éventuel siège à côté du sien, dans la direction de son regard). Personne ne veut être assis dans le champ de vision de quelqu'un d'autre.

On appelle configuration un tableau associant à chaque chaise une orientation. Si D est une configuration, on définit $C_{max}(D)$ comme le nombre maximal de personnes pouvant être placées sans créer de malaise, et $C_{min}(D)$ comme le nombre minimal de personnes nécessaires pour que la salle soit quasi-complète.

Exemple Ci-contre, à gauche une configuration D, et à droite une manière de la remplir. En ajoutant une personne en bas à droite, le remplissage serait quasi-complet. Pour cette configuration D on a donc $C_{min}(D) \leq 6 \leq C_{max}(D)$.

$\rightarrow$	$\uparrow$	$\rightarrow$	$\leftarrow$
$\downarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$
$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$

	$\uparrow$		$\leftarrow$
	$\leftarrow$	$\rightarrow$	
$\downarrow$			

2. **a)** Que peut valoir $C_{max}(D)$ au maximum (autrement dit, si l'hôpital choisit D de manière optimale) ? On pourra commencer par $n = 1, 2, 3$.

   b) Reprendre la question précédente pour $C_{min}(D)$.